

G. Karánc, H. Sachs, F. Schipp; Topics in Algebra, Analysis and Geometry, Gyula Halmos National Memorial Conference, Balatonfüred 1999.

### Eine Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene

Vlasta Szivovicza, Ana Sliepčević

Eine isotrope Ebene  $I_2$  ist eine reelle affine Ebene  $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ , die über eine Absolutfigur  $\{f, F\}$  – bestehend aus einer Geraden  $f$  und einem mit  $f$  inzidenten Punkt  $F$  – metrisiert wird. Alle Transformationen der Gestalt

$$\begin{aligned}\bar{x} &= c_1 + x \\ \bar{y} &= c_2 + c_3 x + y\end{aligned}$$

bilden die dreiparametrische isotrope Bewegungsgruppe  $\mathcal{B}_3$  (vgl. [6], [7]). Nach der Einführung projektiver Koordinaten  $(x_0 : x_1 : x_2)$  in  $I_2 \subset \mathcal{B}_2$ , kann die absolute Gerade  $f$  durch  $x_0 = 0$  und der absolute Punkt durch  $F(0:0:1)$  beschrieben werden.

Unter einem isotropen Kreis versteht man eine reguläre Kurve 2. Ordnung in  $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ , die die absolute Gerade  $f$  im Punkt  $F$  berührt. In der isotropen Ebene  $I_2$  existiert bezüglich  $\mathcal{B}_3$  eine dreiparametrische Mannigfaltigkeit von isotropen Kreisen, die sich durch

$$y = R x^2 + \alpha x + \beta \quad (R \neq 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

beschreiben läßt. Jeder Kreis läßt sich auf die Normalform

$$y = R x^2 \quad \text{mit } R \neq 0 \quad (2)$$

transformieren, wobei  $R$  eine  $\mathcal{B}_3$ -Invariante, genannt isotroper Kreisradius, ist [vgl. 6].

Zwei isotrope Kreise  $k_i: y = R_i x^2 + \alpha_i x + \beta_i$  ( $i=1,2$ ) heißen **kongruent**, wenn  $R_1 = R_2$  gilt. Sie sind **konzentrisch**, wenn zusätzlich noch  $\alpha_1 = \alpha_2$  gilt.

Zwei Kreise der isotropen Ebene können sich zueinander in folgender Lage befinden:

- zwei inkongruente Kreise, schneiden sich in zwei verschiedenen reellen Punkten, sie schneiden sich nicht reell oder sie berühren sich,
- zwei kongruente Kreise oskulieren einander im absoluten Punkt  $F$ , den man als dreifachen Schnittpunkt zählt und schneiden sich in noch einem eigentlichen Punkt. Somit bilden die kongruenten isotropen Kreise ein Oskulationsbüschel mit dem Berührelement  $(F, f)$ .
- zwei konzentrische Kreise haben keinen eigentlichen Punkt gemeinsam. Sie hyperoskulieren einander im vierfach zuzählenden Schnittpunkt  $F$ . Alle konzentrischen Kreise bilden somit ein Hyperoskulationsbüschel mit dem Berührelement  $(F, f)$ .

Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene wurden erstmals von V. Ščurić und H. Sachs ausführlich untersucht (vgl. [7], [10], [11], [12], [13], [14]). Je nach der Realität bzw. der Vielfachheit der Grundpunkte, wie auch nach der Lage dieser Grundpunkte zur

Absolutfigur  $(F, f)$ , wurden die Kegelschnittbüschel in neun Haupttypen eingeteilt. Bei dem Büschelstyp IX existieren 16 verschiedene Typen  $A_i$  ( $i=1, \dots, 16$ ) von Oskulationsbüschel [7]. Wir bezeichnen bei diesen Büscheln mit  $(P, t)$  das Oskulationselement und mit  $Q$  den weiteren Büschelgrundpunkt.

Für die Untersuchungen dieser Arbeit betrachten wir den Typ  $A_{10}$  der Oskulationsbüschel, wo  $(P, t)$  das absolute Linienelement  $(F, f)$  und  $Q$  ein eigentlicher Punkt sei. Durch eine isotrope Schiebung legt man den Punkt  $Q$  in den Ursprung des Koordinatensystems. Alle durch den Punkt  $Q$  laufenden Kegelschnitte, die  $f$  in  $F$  berühren, lassen sich dann in der Form

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{01} x_0 x_1 + 2 a_{02} x_0 x_2 = 0$$

darstellen [7]. Mit der Oskulationsbedingung  $a_{02} : a_{11} = b_{02} : b_{11}$  (siehe Typ  $A_9$ ) in [7]), erhält man zunächst für ein solches Büschel

$$\lambda (a_{11} x_1^2 + 2 a_{02} x_0 x_2) + 2 a_{01} x_0 x_1 = 0.$$

Es gilt  $a_{11} \neq 0$ , sonst wäre das Büschel ausgeartet; es ist auch  $a_{01} \neq 0$ . Setzt man  $a_{11} = 1$ ,  $-a_{02} =: A$  und führt man den neuen Büschelparameter  $\frac{2a_{01}}{\lambda} =: \mu$  ein, so erhält man als Normalform eines Büschels vom Typ  $A_{10}$  in affinen Koordinaten

$$C \equiv x^2 - 2Ay + \mu x = 0. \quad (3)$$

Damit haben wir den

**SATZ 1.:** Ein Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene vom Typ  $A_{10}$  ist bis auf isotrope Bewegungen durch eine einzige Invariante  $A$  eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus allen durch einen festen Punkt  $Q$  laufenden kongruenten Kreisen vom Radius  $A$  (Fig. 1).

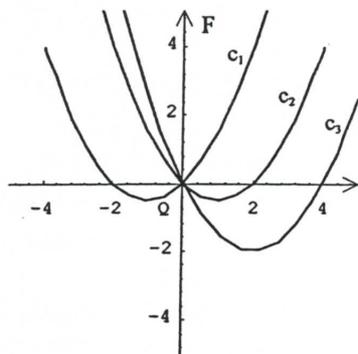


Fig. 1.

Nun lassen wir den Punkt  $Q$  mit absoluten Punkt  $F(0:0:1)$  zusammenfallen. Alle Kegelschnitte die  $f$  in  $F = Q$  berühren, kann man in der Form

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{02} x_0 x_2 + a_{00} x_0^2 = 0$$

darstellen. Wie bei dem Typ  $A_{10}$  in [7], lautet die Oskulationsbedingung  $a_{02} : a_{11} = b_{02} : b_{11}$ , so daß man das Büschel zunächst in der Form

$$\lambda (a_{11} x_1^2 + 2 a_{02} x_0 x_2) + a_{00} x_0^2 = 0$$

ansetzen kann. Sei  $a_{11} = 1$ ,  $-a_{02} = A$ ; führt man den neuen Büschelparameter  $\frac{a_{00}}{\lambda} =: \tau$  ein, so erhält man als Normalform dieses Büschels

$$\mathcal{F} \equiv x^2 - 2Ay + \tau = 0. \quad (4)$$

Dieses Kegelschnittbüschel ist durch eine einzige Invariante  $A$  eindeutig bestimmt. Das Büschel besteht aus allen **konzentrischen Kreise** vom Radius  $A$ , die man durch eine isotrope Schiebung ( $\bar{x} = x$ ,  $\bar{y} = y + \tau$ ) aufeinander abbilden kann. Es ist ein Hyperoskulationsbüschel mit dem Berührelement  $(F, f)$  (Fig. 2).

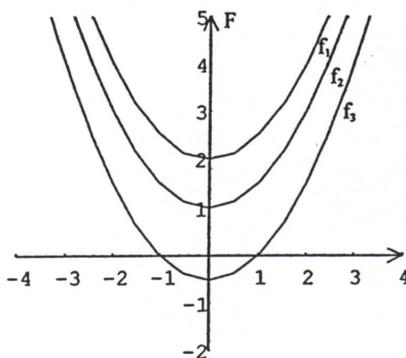


Fig. 2.

Man sieht, daß jeder Kreis  $c$  des Kreisbüschels (3) zu allen Kreisen des Büschels (4) kongruent ist, weil sie denselben Radius  $A$  besitzen. Deshalb schneidet ein Kreis  $c \subset C$  das Büschel (4) in den Punkten  $L_i$  ( $i=1, \dots, \infty$ ) mit den Koordinaten

$$L_i \left( \frac{\tau}{\mu}; \frac{\tau(\tau + \mu^2)}{2A\mu^2} \right).$$

Die Tangentenrichtung eines festen Kreises  $c$  im Berührungspunkt  $L_i$  ergibt sich zu

$$y' = \frac{2\tau + \mu^2}{2A\mu}. \quad (5)$$

Sei nun ein Kreisbüschel  $\mathcal{F}$  aus konzentrischen Kreisen durch (4) gegeben und sei weiters das Zentrum  $V(\bar{x}, \bar{y})$  eines Geradenbüschels  $\mathcal{V}$  vorgegeben. Die Zuordnung zwischen diesen beiden Büscheln werde auf folgende Weise festgelegt:

Jeder Kreis  $f_i \subset \mathcal{F}$  schneidet einen festen Kreis

$$c \equiv x^2 - 2Ay + x = 0, \quad (6)$$

der zu allen Kreise  $f_i$  kongruent ist, in einem Punkt

$$L_i \left( \tau; \frac{\tau(\tau+1)}{2A} \right).$$

Wir bestimmen, die durch den Punkt  $V$  laufende Gerade  $p_i$ , parallel zur Tangente des Kreises  $c$  mit dem Berührungspunkt  $L_i$ . Sie besitzt wegen (5) die Gleichung

$$p_i \equiv y = \frac{2\tau+1}{2A}(x-\bar{x}) + \bar{y}. \quad (7)$$

Für jede Wahl des Kreises  $f \in \mathcal{F}$  durchläuft die Gerade  $p$  ein Geradenbüschel  $\mathcal{V}$  mit der Gleichung

$$\mathcal{V} \equiv (2\tau+1)(x-\bar{x}) - 2A(y-\bar{y}) = 0. \quad (8)$$

Die zwei Schnittpunkte  $A_i$  und  $B_i$  der Geraden (7) mit dem Kreis  $f_i$  sind dann die Punkte der erzeugten Kurve. Es ist offensichtlich eine Kurve 3. Ordnung (Fig.3.).

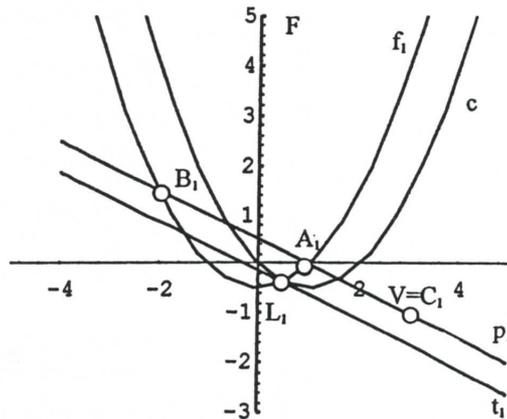


Fig.3.

Die Grundpunkte des gegebenen Büschel sind fünf Punkte der Kubik, wobei in unserem Fall vier davon in den absoluten Punkt fallen. Dem Kreis  $f \in \mathcal{F}$ , der den Scheitel  $V$  des Geradenbüschels enthält, wird die Tangente  $p$  an  $f$  in  $V$  als Bildgerade zugeordnet. Die erzeugte Kubik enthält noch die Berührungspunkte, der von  $V$  an  $c$  legbaren Tangenten. Durch diese neun Elementen ist diese Kubik eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gibt es für jede Gerade des Geradenbüschels  $\mathcal{V}$  eine einzige zu ihr parallele Tangente an den Kreis  $c$ . Durch ihren Berührungspunkt  $L$  läuft ein einziger Kreis des Kreisbüschels (4). Diese Zuordnung ist also eineindeutig und damit ist eine geometrische Erzeugung dieser Kurve 3. Ordnung gewonnen ([2], [3]).

Die Berechnung ihrer Gleichung führt über die Elimination des Parameters  $\tau$  aus (4) und (8) auf

$$k_3 \equiv (2x^2 - 4Ay - 1)(x - \bar{x}) + 2A(y - \bar{y}) = 0. \quad (8a)$$

Die erzeugte Kurve gehört nach der Newtonschen Klassifikation zur Klasse der TRIDENS-Kurven, die den absoluten Punkt  $F$  als Knoten besitzen, wobei  $f$  die Tangente eines Kurvenzweiges durch  $F$  ist. Die zweite Tangente im Knoten ist die isotrope Asymptote der Kurve [9].

Betrachten wir die Kurve  $k_3$  näher.

Die Lage des Punktes  $V$  bezüglich des Kreises  $c$  bestimmt die Realität der beiden Schnittpunkte der erzeugten Kurve  $k_3$  mit dem Kreis  $c$ : sie sind reell, wenn sich zwei reelle Tangenten von  $V$  an  $c$  legen lassen. Liegt  $V$  auf  $c$  dann berührt die Kurve  $k_3$  den Kreis  $c$ . Liegt  $V$  im Inneren des Kreises, dann sind die Schnittpunkte konjugiert-komplex.

Wird (8a) nach  $y$  differenziert, dann bekommt man

$$\partial k_3 / \partial y = -4A(x - \bar{x}) + 2A,$$

woraus mittels  $\partial k_3 / \partial y = 0$  als **isotrope Asymptote** des Tridens folgt

$$x = \bar{x} + \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Wir schreiben (9) in der Form

$$2(x - \bar{x}) - 1 = 0 \quad (9a)$$

und die Gleichung (8a) nunmehr in der Gestalt:

$$[x^2 - 2Ay + \frac{1}{2}(x + \bar{x}) - \frac{1}{4}][2(x - \bar{x}) - 1] + [\bar{x}^2 + \bar{x} - 2A\bar{y} - \frac{1}{4}] = 0. \quad (10)$$

Aus (10) ist ersichtlich, daß der isotrope Kreis

$$k_a \equiv x^2 - 2Ay + \frac{1}{2}(x + \bar{x}) - \frac{1}{4} = 0 \quad (11)$$

keinen eigentlichen Schnittpunkt mit der Kubik besitzt. Alle sechs Schnittpunkten sind somit in den absoluten Punkt gefallen und (11) ist damit als **asymptotischer Kreis** der Kurve  $k_3$  nachgewiesen [5] (Fig.4).

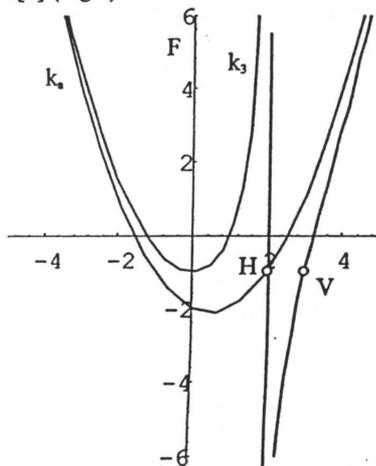


Fig.4.

Damit haben wir den folgenden

**SATZ 2.** Jede (1,1)-Korespondenz der isotropen Ebene zwischen einem konzentrischen Kreisbüschels und einem Geradenbüschels erzeugt einen Tridens.

Dieser Satz ist ein Analogon zum Czuberschen Satz der euklidischen Ebene. Mit Hilfe des Czuberschen Satzes hat D. Palman die vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene erzeugt [4].

Für jede Wahl des Kreises  $c \subset C$  bzw. des Parameterwertes  $\mu$  erhält man eine Kurve 3. Ordnung. Es stellt sich die folgende Frage: Bildet die Gesamtheit der so erzeugten Kurven einen **Büschel von Kurven 3. Ordnung**, das sich in der Form

$$\mathcal{H} \equiv (2x^2 - 4Ay - \mu^2)(x - \bar{x}) + 2A\mu(y - \bar{y}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (12)$$

$$x^3 - \bar{x}x^2 - \frac{\mu^2}{2}x - 2Axy + (2A\bar{x} + A\mu)y + \bar{x}\frac{\mu^2}{2} - A\mu\bar{y} = 0 \quad (12a)$$

darstellen läßt, wobei  $\mu$  der Büschelparameter ist?

Um dies zu untersuchen, nimmt man zwei Kurven  $k_3^1$  und  $k_3^2 \subset \mathcal{H}$  mit den zugehörigen Parametern  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , wobei  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Wie bekannt, haben zwei Kurven 3. Ordnung neun Schnittpunkten gemeinsam. Nach kurzer Rechnung erhält man  $x = \bar{x}$ , d.h. alle Kurven laufen durch den Punkt  $V$ . Der Punkt  $F$  zählt sechsfach [3], weil noch die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{4} - (\mu_1 + \mu_2)\bar{x} + 2A\bar{y} - \frac{\mu_1\mu_2}{2}}$$

auftreten. Bekanntlich ist ein Büschel von Kurven 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt durch acht Punkte eindeutig bestimmt. Im unserem Fall haben aber alle Kurven sieben Punkte gemeinsam, d.h. sie bilden kein Büschel sondern ein Netz.

Wird (12a) nach  $y$  abgeleitet, so erhält man

$$\partial k_3 / \partial y = -4A(x - \bar{x}) + 2A\mu$$

und daraus die isotrope Asymptote

$$x = \bar{x} + \frac{\mu}{2} \quad (13)$$

für jeden Tridens aus  $\mathcal{H}$ . Wir bemerken noch, daß diese vollkommen zirkulären Kurven 3. Ordnung keinen eigentlichen Schnittpunkt mit ihren Asymptoten besitzen. Ihre Hauptpunkten fallen mit dem absoluten Punkt zusammen.

Für den Parameterswert  $\mu = 0$  zerfällt die Kurve 3. Ordnung in die Geraden  $x = \bar{x}$  und die Kurve  $x^2 = 2Ay$ .

Jeder Tridens besitzt einen **asymptotischen Kreis**. Um seine Gleichung zu finden, transformieren wir die Kurve (12a) mittels der isotropen Bewegung

$$\begin{aligned} x^* &= x - \bar{x} - \frac{\mu}{2} \\ y^* &= y \end{aligned} \quad (*)$$

auf die Form

$$\bar{k}_3 \equiv 2x^3 + (3\mu + 4\bar{x})x^2 + \left(\frac{\mu^2}{2} + 4\bar{x}\mu + 2\bar{x}^2\right)x - 4Axy - \frac{\mu^3}{4} + \bar{x}\mu^2 + \bar{x}^2\mu - 2A\mu y = 0,$$

so daß die isotrope Asymptote mit der y-Achse zusammenfällt. Aus dieser Gleichung folgt dann, daß

$$\bar{k}_a \equiv 2x^2 + (3\mu + 4\bar{x})x + \frac{\mu^2}{2} + 4\bar{x}\mu + 2\bar{x}^2 - 4Ay = 0$$

der asymptotische Kreis der Kurve  $\bar{k}_3$  ist.

Mittels der Umkehrbewegung zu (\*) gewinnt man die Gleichung der asymptotischen Kreise für die Kurven  $k_3 \subset \mathcal{H}$  als

$$k_a \equiv x^2 + \frac{\mu}{2}(x + \bar{x}) - \frac{\mu^2}{4} - 2Ay = 0. \quad (14)$$

Alle sechs Schnittpunkte der  $k_3$  mit  $k_a$  sind in dem absoluten Punkt  $F$  gefallen. Deshalb kann man  $k_a$  als Hyperoskulationskreis der Kurve  $k_3$  im absoluten Punkt bezeichnen.

Nun betrachten wir die Gesamtheit der asymptotischen Kreise der Kurven aus  $\mathcal{H}$ . Sie oskulieren einander im absoluten Punkt und schneiden sich in einem eigentlichen Punkt  $S_i$  mit den Koordinaten

$$S_i \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \bar{x}; \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + 3\mu_1\mu_2 - \bar{x}(\mu_1 + \mu_2) - \bar{x}^2}{8A} \right). \quad (15)$$

Sie bilden somit kein Büschel sondern ein Netz.

Der asymptotische Kreis (14) schneidet die isotrope Asymptote (13) jedes Tridens in einem eigentlichen Punkt  $H$  mit den Koordinaten

$$H \left( \bar{x} + \frac{\mu}{2}; \frac{1}{2A}(\bar{x}^2 + 2\mu\bar{x} + \frac{\mu^2}{4}) \right).$$

Setzt man den Wert  $\frac{\mu}{2}$  aus (13) in (14) ein, so folgt, daß die Punkte  $H$  aller Kurven aus (12) auf einem isotropen Kreis  $h$  mit der Gleichung

$$h \equiv x^2 + 2\bar{x}x - 2\bar{x}^2 - 2Ay = 0$$

liegen.

## LITERATUR

- [1] Beban - Brkić, J.: On the Focal Curve of Conic Pencils in  $I_2$ , KoG • 2(1997),
- [2] Cesarec, R.: Analitička geometrija I, Zagreb, 1957,
- [3] Fladt, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Frankfurt/M, 1962,
- [4] Palman, D.: Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene, Glasnik MFA 14(1959), 19-74,

- [5] Palman, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, Rad JAZU 444(1989), 222-251,
- [6] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie, Braunschweig – Wiesbaden, 1987,
- [7] Sachs, H.: Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, Öster.Akad.Wiss., Wien 196(1987), 337-375,
- [8] Sachs, H.: Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, Studia Sci. Math. Hungarica 24(1989), 377-383,
- [9] Savelov, A.A.: Ravninske krivulje, Školska knjiga, Zagreb, 1979,
- [10] Szivovicza, V.: Berührbüschel von Kegelschnitten der isotropen Ebene mitkonjugiert – komplexen Grundpunkten, Rad HAZU 470(1995), 13-34,
- [11] Ščurić-Čudovan, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I Teil, Rad JAZU 450(1990), 41-51,
- [12] Ščurić-Čudovan, V., Sachs H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, I, Rad HAZU 470(1995), 119-137,
- [13] Ščurić-Čudovan, V.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ VI der isotropen Ebene, Math. Panonica 7/1(1996), 47-67,
- [14] Ščurić-Čudovan, V., Sachs H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, II, Rad HAZU 472(1997), 27-53.

Vlasta Szivovicza, Ana Sliepčević  
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
 Kačićeva 26, 10 000 Zagreb, Croatia  
 e-mail: szvlasta@juraj.gradnz.grad.hr  
 e-mail: anasli@juraj.gradnz.grad.hr

Whe  
 3-sp  
 (size  
 of cl  
 Whe  
 posit  
 comj  
 posit  
 creat  
 In th  
 the j  
 wher  
 To g  
 came  
 to tl  
 view  
 have  
 is sh  
 time